

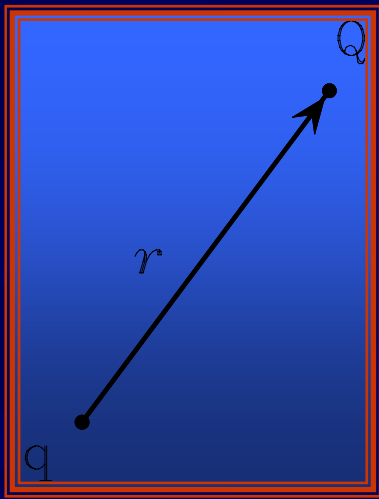
Verso un “lessico familiare” comune.

Dovendo in seguito parlare sotto il profilo storico ed epistemologico di “campi & reti”, converrà richiamarne una volta per tutte, in via preliminare, le valenze fisico matematiche.

Ciò consentirà di presentare tali “burbere
nozioni” secondo il più naturale e
fisiologico metodo storico.

In una forma certo meno elegante e
rigorosa, ma certo molto più
empaticamente metabolizzabile.

Forse perché vicina all’approccio intuitivo
degli uomini che la concepirono...



La legge di Coulomb:
un'azione a distanza
(in essa infatti il tempo
non conta...)

$$\mathbf{f} = k \frac{qQ}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \Leftrightarrow \mathbf{f} = -k \{qQ\} \text{grad} \frac{1}{r}$$
$$\mathbf{f} = Q \left\{ k \frac{q}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \right\} Q = Q \mathbf{e}$$

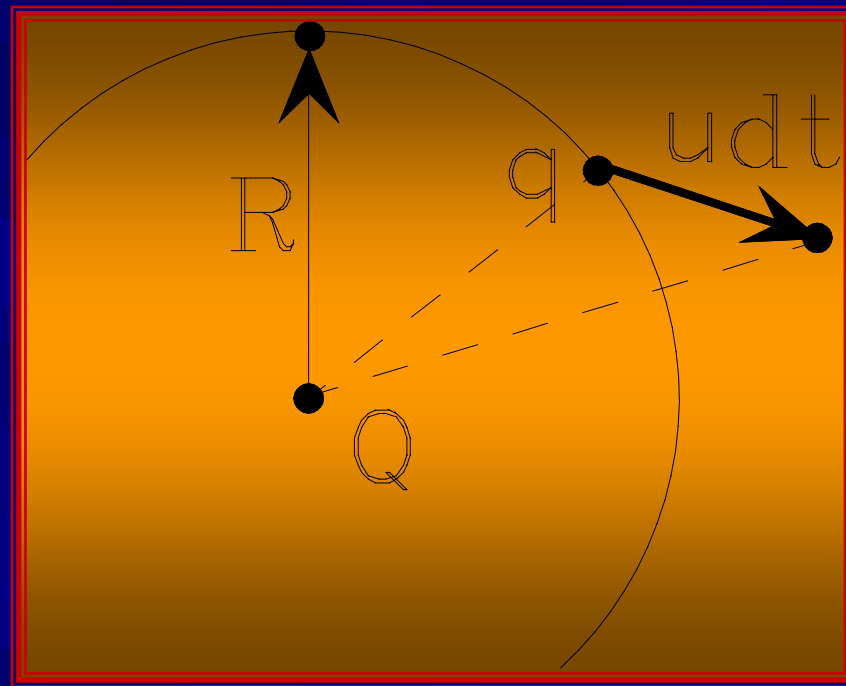
**La legge di Coulomb è descrittiva,
ma non esplicativa: non dice niente
del “meccanismo sottostante”...**

- Nihil agit in distans nisi prius agit in medium
- Ma forse l'esigenza di un mezzo è puramente antropomorfa
- Oppure può darsi che lo spazio geometrico sia già un medium e che noi non sappiamo riconoscere queste sue doti magiche...

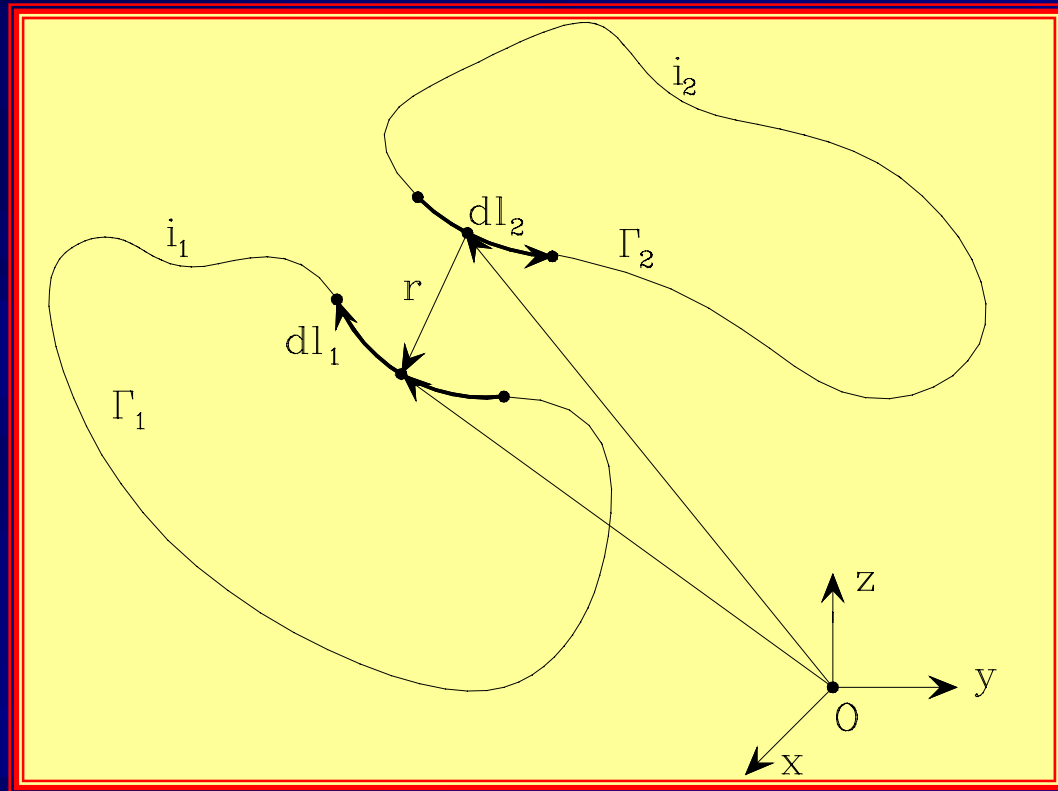
E' un fatto però che:

- Gli attori del fenomeno (il potenziante q ed il potenziato Q) sono remoti;
- La variabile tempo è assente, il che vuol dire che essa è la stessa per i due attori e conseguentemente che essi si scambiano informazioni a velocità infinita;
- Lo spazio in cui avviene il fenomeno è estraneo all'evento: nel suo ruolo di semplice contenitore di corpi, lo spazio è puramente geometrico.

E se il segnale decidesse di viaggiare a velocità finita?



Questo problema vale anche per
il buon Ampère...



E più in generale per tutte le leggi di tipo integrale.

- Esse, infatti, fanno intervenire in integrando relazioni matematiche che governano interazioni tra potenziato e potenziante che usano la stessa variabile temporale
- Ma allora questo accade anche per la formula di Neumann delle induttanze...

E se poi quell'impunito del potenziante fosse così remoto da essere ignoto?

- Meglio cambiare chiave di lettura...
- Già, ma quali sono le chiavi di lettura possibili?
- Appartengono alla Meccanica o alla Fisica?

Tre sono i modelli fondamentali della fisica:

- Interazione coulombiana (azione a distanza di tipo centrale)
- Interazione corpuscolare (spazio geometrico- particellare)
- Moto ondulatorio (continuum-fisico)

Nasce la teoria di campo...

- La teoria di campo esprime solo un cambiamento di prospettiva: il protagonista non è la coppia di attori remoti, ma lo spazio in cui essi sono immersi
- Vediamo meglio...

Sia in proposito il campo termico in una stanza. La variazione spazio-temporale della temperatura in essa misurabile è imputabile alle sorgenti di calore presenti all'interno ed all'esterno del locale. Se la loro natura e la loro collocazione è nota, allora, avvalendosi delle leggi della termodinamica, è possibile risalire alla funzione $T(x,y,z,t)$ descrittiva del fenomeno.

La procedura seguita, correlando cause ed effetti tra loro remoti, rientra nella teoria dell'azione a distanza.

Si spengano ora le sorgenti interne alla stanza e si assumano di natura e di collocazione incognita quelle esterne. In tal caso l'approccio precedente, non più utilizzabile, deve essere sostituito da **metodi basati sulle caratteristiche di continuità e di contiguità** che, come mostra senza eccezione l'esperienza, sono proprie dei campi fisici. Per esse, nel caso termico qui considerato, la funzione incognita $T(x,y,z,t)$ assume in ogni punto valori condizionati da quelli assunti nei punti limitrofi: se nell'intervallo $t_0 — t_1$ la temperatura $T(P,t)$ aumenta con una certa legge, allora essa, in un punto limitrofo $(P+dP)$, assumerà lo stesso valore in un opportuno intervallo $t_0 — t_2$.

Esiste dunque, imposta dalle proprietà costitutive di un mezzo intermedio esplicitamente compromesso con l'evento, una condizione spazio-temporale di vincolo cui deve sottostare la grandezza T incognita

Questa è indipendente dalla natura e dalla collocazione delle sorgenti poste in punti distinti da P ed è legata in modo esclusivo alla “natura della quantità osservabile $T(P,t)$ ”. Non resta allora che mettere in equazione tale proprietà ed integrare, sulla base di assegnate condizioni iniziali ed al contorno, l’equazione differenziale spazio-temporale che ne consegue.

(Le condizioni iniziali riassumono la “storia passata” del sistema; le condizioni al contorno sintetizzano sulla frontiera del dominio di integrazione il “contributo del sistema esterno” alla frontiera stessa).

L'equazione è ben nota

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x, y, z, t) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} T(x, y, z, t) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} T(x, y, z, t) - \frac{c}{\sigma} \frac{\partial}{\partial t} T(x, y, z, t) = -\frac{c}{\sigma} \rho(x, y, z, t)$$

Ma a noi interessa farne solo l'anatomia:

- L'incognita $T(P,t)$ deve soddisfare l'equazione precedente senza alcun riferimento alle sorgenti di calore esterne al dominio considerato.
- La scelta della temperatura $T(P,t)$, compiuta tra le infinite soluzioni possibili[1], va attuata tenendo conto della distribuzione delle sorgenti nei punti esterni al dominio. Il loro contributo si traduce infatti nella assegnazione delle condizioni al contorno subordinatamente alle quali viene condotta, in condizioni che qui si ritengono di esistenza ed unicità, l'integrazione.
- In tal modo, mentre l'azione a distanza richiede la conoscenza di tutte le sorgenti, la teoria di campo necessita della conoscenza delle sole condizioni al contorno associabili alle sorgenti stesse.

è un caso di astuzia selvaggia!

Vediamo un esempio più
ravvicinato: la fune vibrante di
elasticità k e massa specifica μ

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{\mu}}} p^2 \right\} y(x, t) = \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} p^2 \right\} y(x, t) = 0$$

Si tratta di un'equazione operatoriale di Helmholtz, nella quale $y(x,t)$ rappresenta il displacement.

- L'equazione rappresenta un fenomeno di dinamica per continuità mediata dal mezzo;
- La compromissione dello stesso, che è in tal modo uno spazio fisico, è espressa dal termine (p/c) nel quale $p=d/dt$ è l'operatore di Heaviside e c è la celerità del fronte d'onda

Lo stato dinamico si propaga per contatto a celerità finita.

Risulta però:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x) = 0 \Leftrightarrow c = \lim_{\mu \rightarrow 0} \sqrt{\frac{k}{\mu}} = \infty$$

La materia risponde in tal caso alla sollecitazione con uno spostamento che, istantaneamente, si trasferisce all'elemento contiguo. In tali ipotesi, espressione di un'interazione che si dirà di *pseudocontatto*, la dinamica del sistema risulta governata da un'equazione di Laplace *ottenuta* particolarizzando la precedente.

Viene già spontanea una prima classificazione:

- La relazione integrale è di azione particellare a distanza;
- La relazione differenziale a derivate parziali è di teoria di campo: di coontatto (per celerità finita) e di pseudocontatto (per celerità infinita)

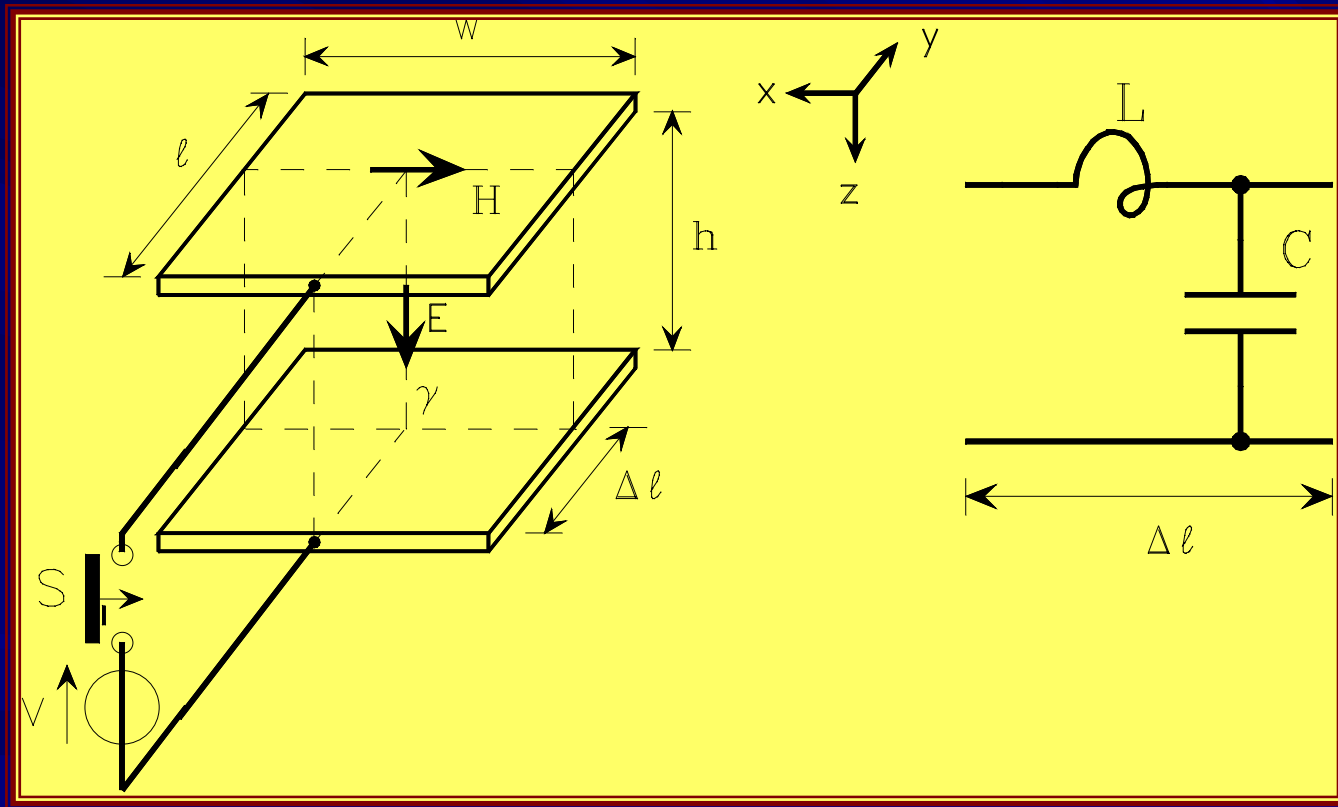
E l'equazioni differenziali ordinarie?

- La variabile tempo è comune e la causa (il termine noto) è remota: si tratta di un'azione a distanza
- Ma allora la teoria delle reti è particellare e rappresenta un'azione a distanza. Accettarla vuol dire dunque respingere il senso stesso della filosofia scolastica: non è più vero che “nihil agit in distans nisi prius agit in medium”!

O forse si tratta di
un'approssimazione...

Una cosa è certa: la linea a costanti distribuite è azione mediata. L'equazione è quella a derivate parziali propria della teoria di campo. In altre parole: le ereti a costanti concentrate sono azione newtoniana in uno spazio geometrico, quelle a derivate parziali sono di tipo faradiano-hertziano in uno spazio fisico.

Infatti:



Impressa, con la chiusura dell'interruttore S, la tensione V, questa, dopo un intervallo dt avrà percorso, con una celerità c incognita, lo spazio longitudinale $dx=cdt$. Così facendo, avrà depositato, sul tratto dx di conduttore sottoposto alla tensione impressa V, la carica $dq=CdxV$, C essendo la capacità per unità di lunghezza del doppio strato. Ne seguirà la corrente $i=pdq=VCdx/dt=VCc$.

Tale tensione è calcolabile anche tramite la legge di Faraday applicata al ciclo γ . Si ha in tal caso: $V=p\phi=d(Lidx)/dt$. Sostituendo la corrente, si ottiene la relazione $V=CLVc^2$, da cui, risolvendo rispetto alla celerità, si ha:

$$c = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

La compromissione del mezzo con l'evento è certificata dall'esistenza di un'imedenza dello spazio (che in tal modo da geometrico diventa fisico) così espressa:

$$I = VC \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{V}{\sqrt{\frac{L}{C}}} = \frac{V}{Z}$$

Viene spontanea una prima classificazione:

<i>Azione per contatto</i>	<i>Azione a distanza</i>	<i>Azione per pseudocontatto</i>
<i>Teoria pura di campo</i>	<i>Teoria newtoniana</i>	<i>Teoria di campo</i>
<i>Celerità finita</i>	<i>Celerità infinita</i>	<i>Celerità infinita</i>
<i>Leggi locali di tipo differenziale</i>	<i>Leggi globali di tipo integrale</i>	<i>Leggi locali di tipo differenziale</i>
<i>Compromissione mezzo-evento</i>	<i>Assenza di compromissione</i>	<i>Assenza di compromissione</i>

Occorre allora mettere a punto gli strumenti di analisi.

- Si tratterà di grandezze del tipo $f(P,t)$
- Queste potranno essere rappresentative di campi scalari oppure saranno le componenti di vettori
- Costituiranno le densità di causa (le forzanti) e le densità di effetto (le risposte)
- Trattandosi di teoria di campo, saranno espresse (e dunque misurate) nel medesimo punto

- Come sempre, si dovranno associare ai valori attuali-locali le corrispondenti rapidità di variazione.
- Trattandosi di teoria di campo, tali rapidità andranno intese sia in senso spaziale che temporale.

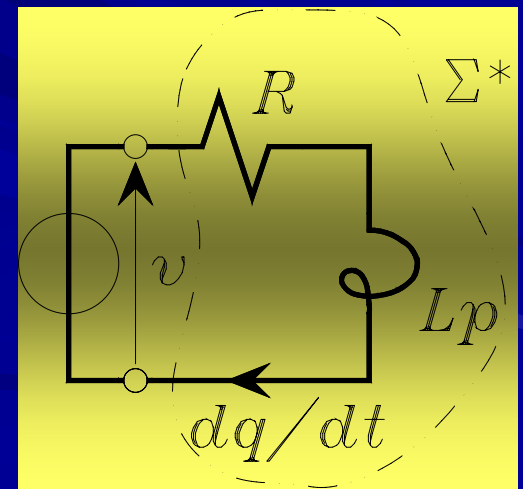
Vediamoli questi strumenti...

- Per le derivate temporali $d^n / dt^n = p^n$ niente di nuovo.
- Basterà solo ricordare che esse sono associate alla freccia del tempo, per cui, se, n è pari, esse rappresentano fenomeni conservativi, mentre se è dispari sono associate a fenomeni dissipativi

Con riferimento al circuito, assunta la carica q come variabile lagrangiana, si ha:

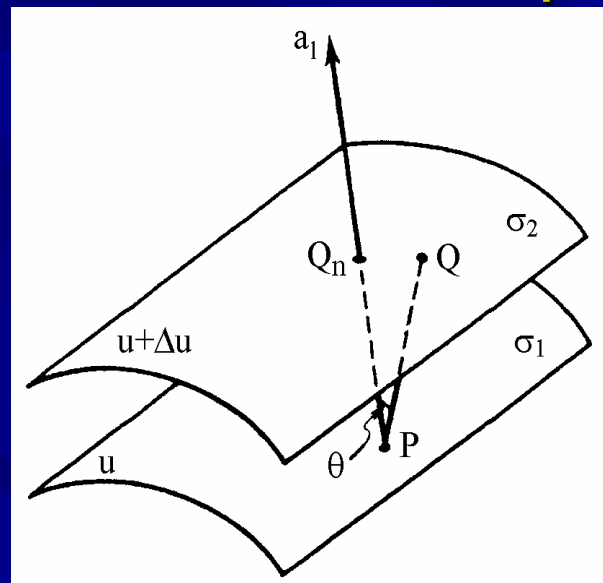
$$L p^2 q + R p q = v$$

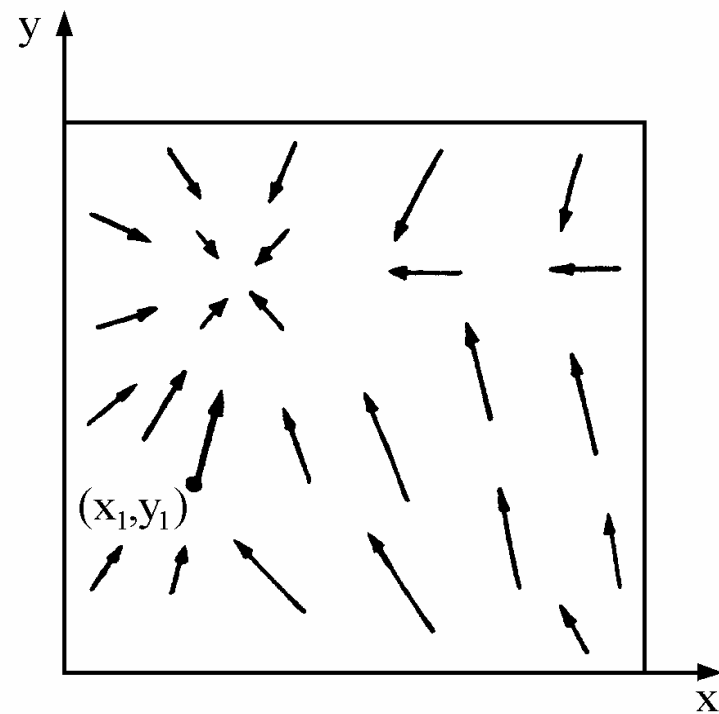
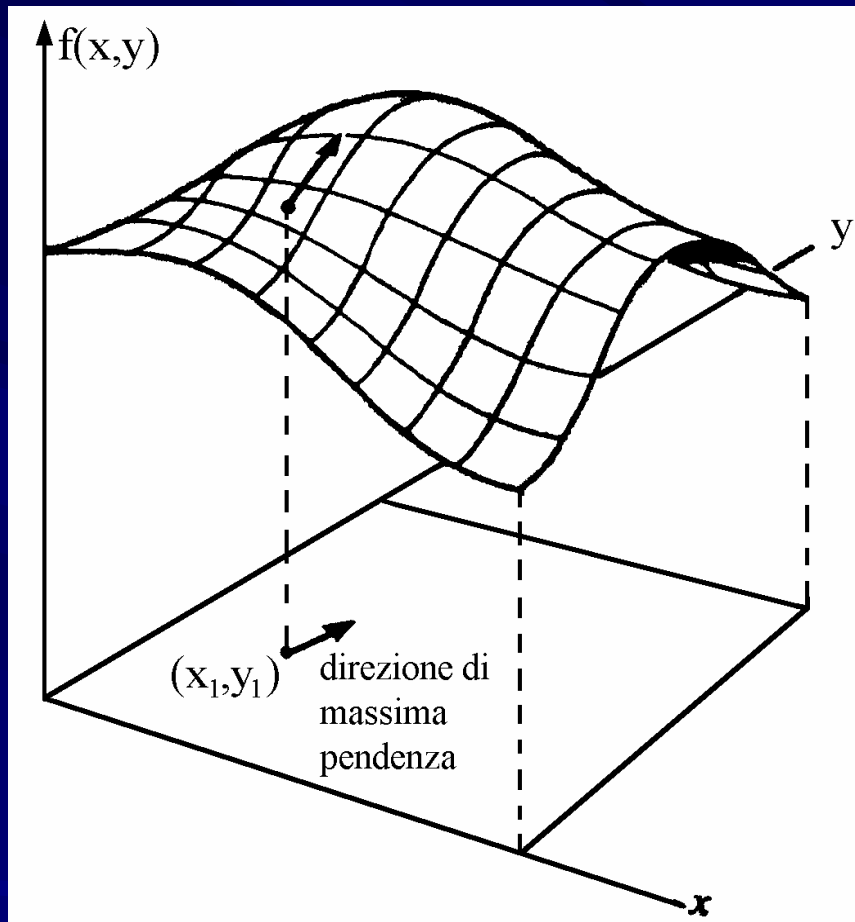
ciò che conferma l'asserto



Per le derivate temporali
la cosa è un po' più complessa, ma
neanche tanto...

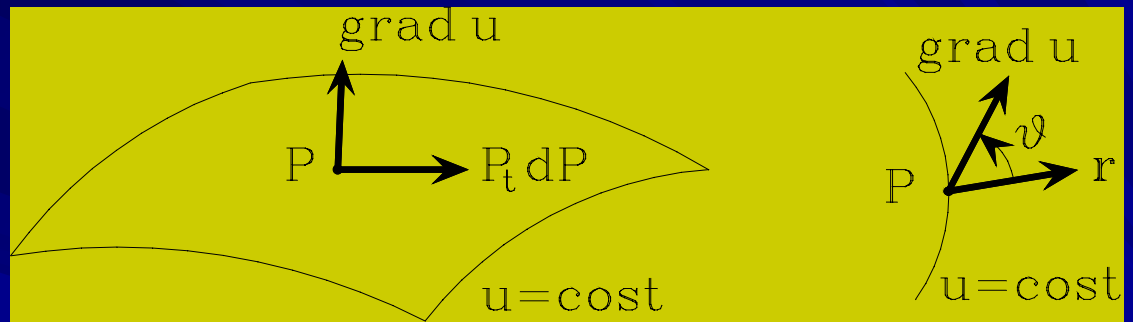
Converrà allora calcolare il **gradus**, il
passo per antonomasia, la direzione di
massima variazione spaziale





Ne emerge il gradiente

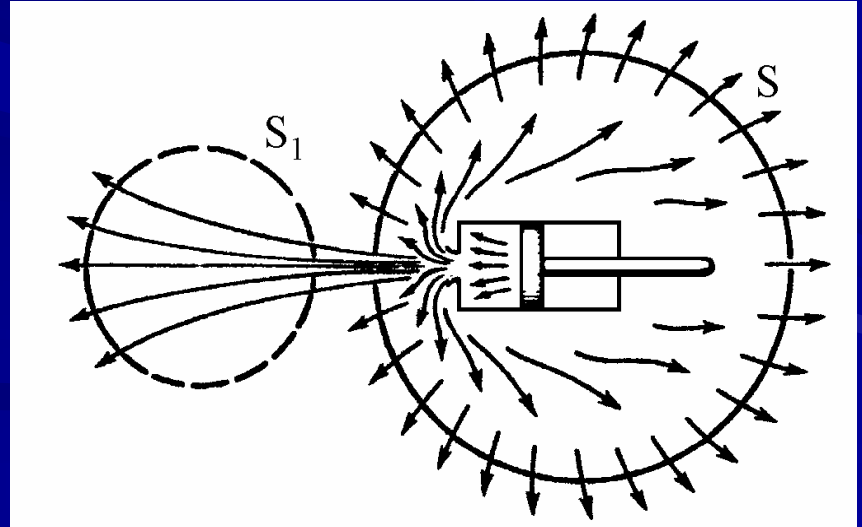
$$\text{gradu} = \frac{\partial u}{\partial n} \mathbf{n}$$



Ma non basta: occorrono anche le densità di sorgente

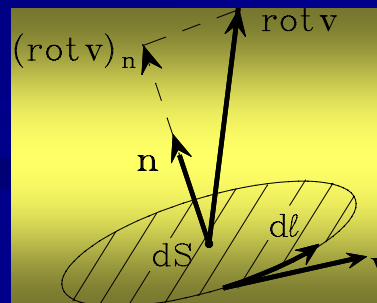
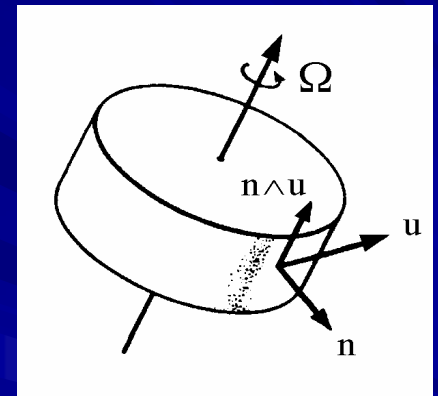
La prima è una densità volumetrica scalare, la divergenza:

$$\lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta\tau} = \frac{d\Phi}{d\tau} = \text{div } \mathbf{A}$$



L'altra, compendiosa della
 “viscosità del mezzo”, è una
 densità vettoriale areolare di
 vortice: il rotore

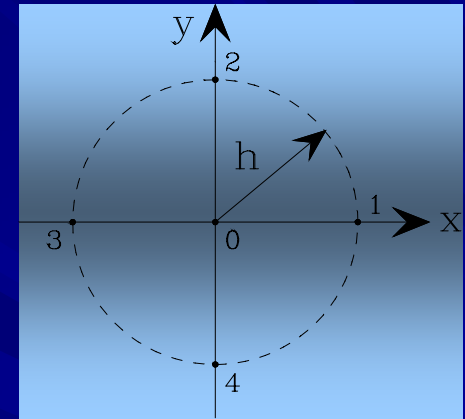
$$\lim_{\Sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_{\Gamma_\Sigma} \mathbf{v} \times d\mathbf{l} = \text{rot } \mathbf{v} \times \mathbf{n}$$



Occorre ora tener conto dell'elasticità del mezzo

Maxwell denominò lo scalare

$$\Delta_2 u|_0 = -\frac{6}{r^2} (u_o - \langle u \rangle)$$



concentrazione volumetrica della grandezza u. Dimostrò che:

$$\text{divgrad} = \Delta_2$$

*Un campo vero è una funzione matematica
che si adopera per evitare l'idea di azione a
distanza.*

R. Feynmann

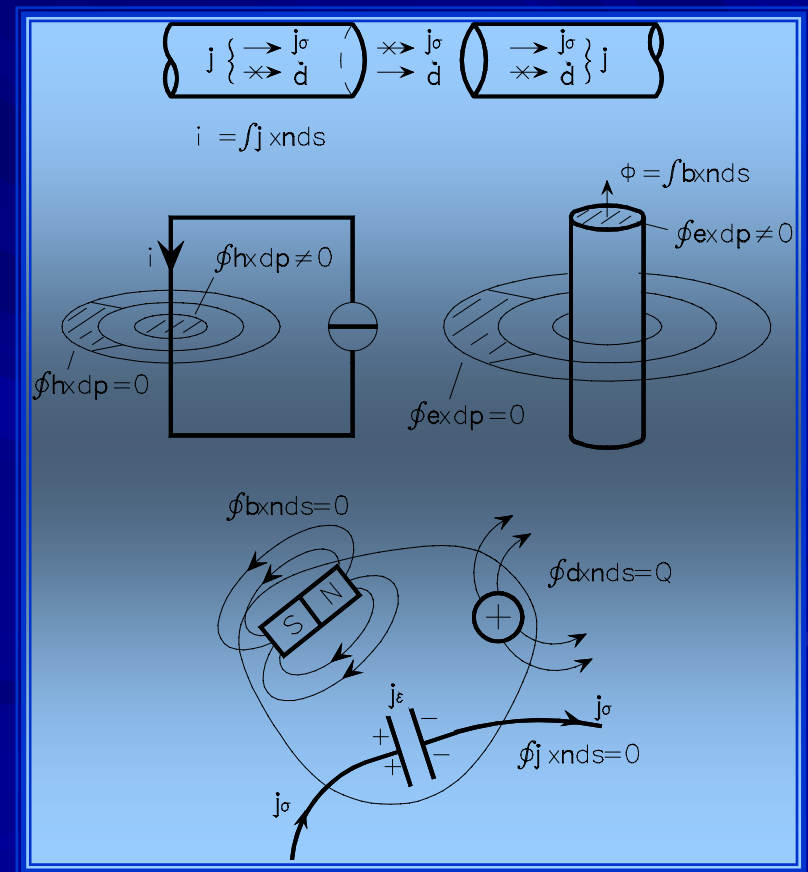
Le equazioni di campo

$$\{\Delta_2 - \epsilon\mu p^2 - \sigma\mu p\} \cdot \varphi(\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{r}, t)$$

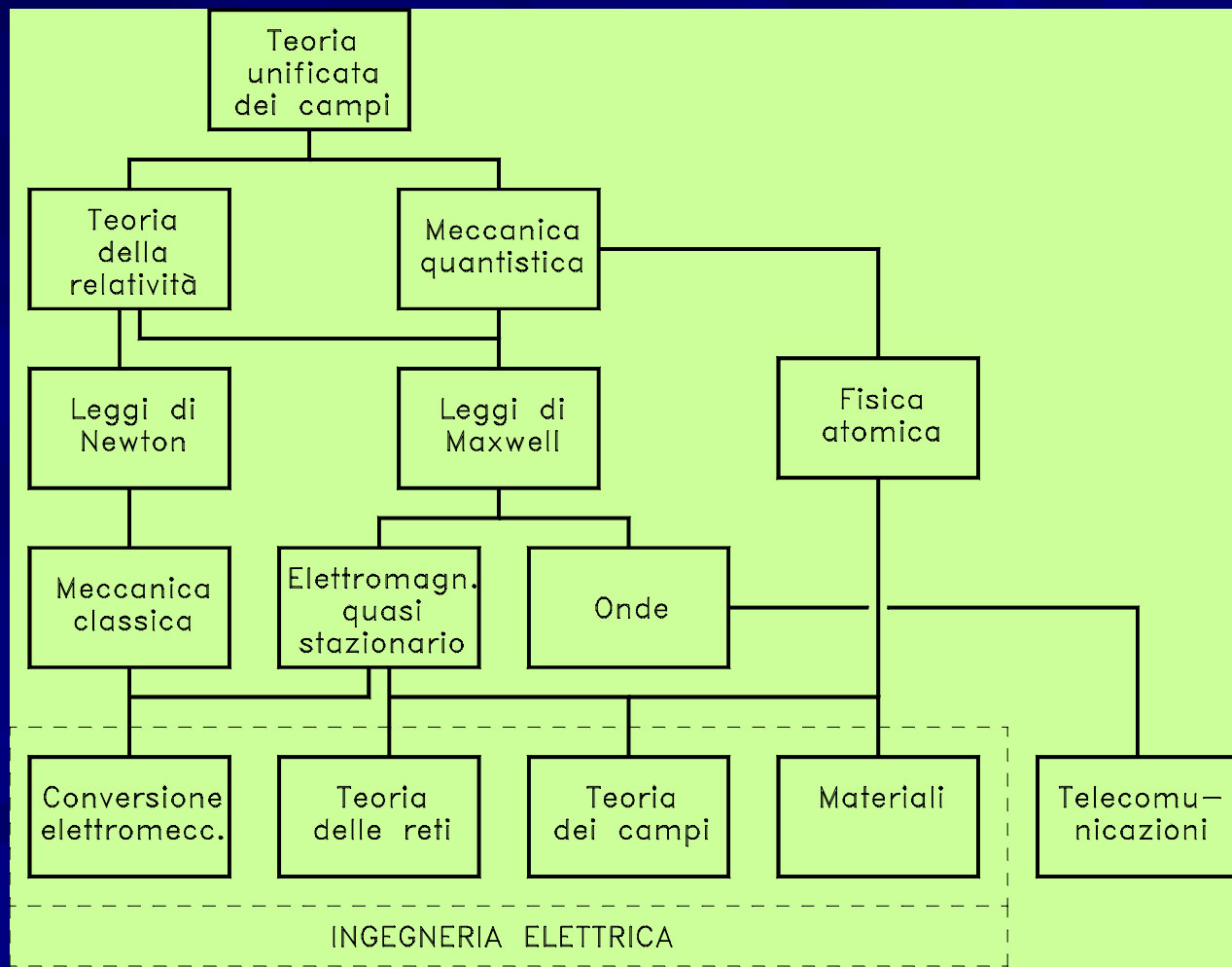
Teoria pura di campo	$f(\mathbf{r}, t) = 0 \Rightarrow \{\Delta_2 - \epsilon\mu p^2 - \sigma\mu p\} \cdot \varphi(\mathbf{r}, t) = 0$	Caso omogeneo: assenza di sorgenti	Azione per contiguità
	$\epsilon\mu p^2 \gg \sigma\mu p \Rightarrow \{\Delta_2 - \epsilon\mu p^2\} \varphi = f$	Caso conservativo: fenomeno propagativo	
	$\epsilon\mu p^2 \ll \sigma\mu p \Rightarrow \{\Delta_2 - \sigma\mu p\} \cdot \varphi(\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{r}, t)$	Caso dissipativo: fenomeno diffusivo	
Teoria di campo	$\epsilon\mu p^2 + \sigma\mu p = 0$ $\Downarrow$ $\begin{cases} \Delta_2 \varphi(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}) & \text{equazione di Poisson} \\ \Delta_2 \varphi(\mathbf{r}) = 0 & \text{equazione di Laplace} \end{cases}$	Caso stazionario	Azione a distanza
Teoria circuit ale	$\Delta_2 = 0$ $\Downarrow$ $\{\epsilon\mu p^2 - \sigma\mu p\} \cdot \varphi(t) = y(p) \cdot \varphi(t) = f(t)$	Caso uniforme	

Le equazioni di Maxwell rientrano in tale chiave di lettura ed in tale criterio di classificazione

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \mathbf{e} + \text{pb} = 0 \\ \text{rot } \mathbf{h} - \text{pd} = \mathbf{j}_\sigma \\ \text{div } \mathbf{d} = \rho_L \\ \text{div } \mathbf{b} = 0 \end{array} \right.$$



Il dato conoscitivo



La classificazione è immutata rispetto al caso generale. Tutto dipende, in termini di dati costitutivi e di frequenza, dalla corrente dielettrica.

Prendiamo infatti l'equazione d'onda:

$$\{\Delta_2 - \varepsilon\mu p^2 - \sigma\mu p\} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{e}(P, t) \\ \mathbf{h}(P, t) \end{bmatrix} = 0$$

Operando nel dominio fasoriale, si ha:

$$\left\{ \Delta_2 + k^2 \cdot \left[1 - j \frac{1}{2\pi} \frac{T}{\tau} \right] \right\} \cdot \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{E}} \\ \overline{\mathbf{H}} \end{bmatrix} = 0$$

Il carattere iperbolico (propagativo) o parabolico (diffusivo) dipende dal rapporto T/τ tra il periodo T della forzante ed il tempo di rilassamento ε/σ necessario al mezzo per “ricomporsi” a seguito di una perturbazione.

Ne deriva una classificazione del tipo seguente:

Regime	<i>legge ai rotori</i>	<i>equazione d'onda</i>	<i>equazione</i>	<i>fenomeno</i>
$\tau \gg T$	$\text{rot} \bar{\mathbf{H}} = j\omega\epsilon \bar{\mathbf{E}}$	$\{\Delta_2 + k^2\} \cdot \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{E}} \\ \bar{\mathbf{H}} \end{bmatrix} = 0$	<i>iperbolica di Helmholtz</i>	<i>propagativo</i>
$\tau \ll T$	$\text{rot} \bar{\mathbf{H}} = \sigma \bar{\mathbf{E}}$	$\{\Delta_2 - j\omega\sigma\mu\} \cdot \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{E}} \\ \bar{\mathbf{H}} \end{bmatrix} = 0$	<i>parabolica di Fourier</i>	<i>diffusivo</i>

Il senso di mezzo compromesso con l'evento

$$\xi = \frac{\omega \epsilon}{\sigma} = \frac{j_{\epsilon}}{j_{\sigma}} = \frac{\epsilon \mu \omega^2}{\sigma \mu \omega} = 2\pi \frac{\tau}{T}$$

Dielettrici

$$\xi > 100$$

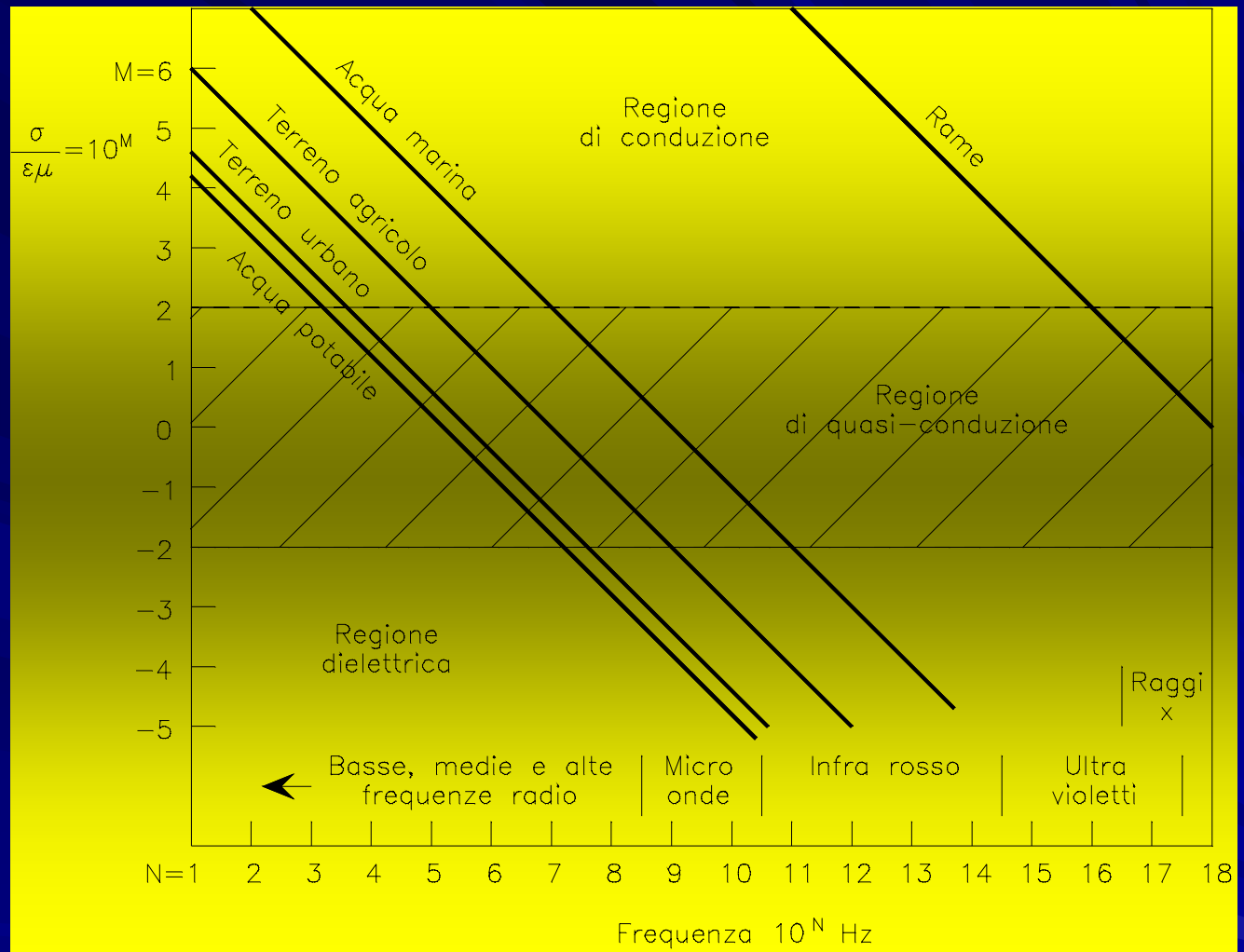
Quasi Conduttori

$$1/100 < \xi < 100$$

Conduttori

$$1/100 > \xi$$

Classificazione quantitativa e dinamica dei materiali dielettrici e conduttori basata sul fattore adimensionale ξ deducibile dalla legge di Ampere-Maxwell



Regione dielettrica, di quasi conduttività e di conduttività di un materiale dedotta dal suo fattore dinamico ξ

L'integrale primo dell'energia

Integrando vettorialmente per parti le equazioni di Maxwell, se ne ottiene l'integrale primo che costituisce la relazione di Poynting

$$\int_{\tau_{\infty}} \mathbf{e}^* \times \mathbf{j}_{\sigma} d\tau = \int_{\tau_{\infty}} \frac{j_{\sigma}^2}{\sigma} d\tau + \int_{\tau_{\infty}} [\mathbf{e} \times \mathbf{p} \mathbf{d} + \mathbf{h} \times \mathbf{p} \mathbf{b}] d\tau + \oint_{\Sigma_{\infty}} \mathbf{e} \wedge \mathbf{h} \times \mathbf{n} dS$$

Il senso fisico-matematico della transizione campi reti.

- Essendo dominate da equazioni ordinarie, le reti sono newtonianamente espressione di una azione a distanza di tipo particellare.
- Coseguentemente, le equazioni matematiche delle reti non esistono come sottocaso di Maxwell, possono avere pertanto un carattere puramente postulatorio, di tipo ipotetico deduttivo.
- Non così le equazioni fisiche delle reti: in tal caso la parte del padrone è fatta dagli strumenti e non è detto che questi siano così “lesti” da cogliere sempre l'effetto propagativo in atto....



May 11 - No. 1



scrivi S&E
ma leggi storia ed epistemologia
grazie.
adri